Concours Commun I.N.A. - E.N.S.A.

1985

MATHÉMATIQUES

(Option générale)

DEUXIÈME COMPOSITION

Durée : 3 heures

DANS TOUT LE PROBLÈME :

Le corps de base est R.

P (A) *désigne la probabilité de l'événement* A.

Si X *est une variable aléatoire réelle, et si* x *est un réel, on rappelle que la fonction de répartition* F *associée à* X *est définie par :*

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ F(x) = P(X < x).$$

E (X) *désigne (lorsqu'elle existe) l'espérance mathématique (ou moyenne, ou moment d'ordre* 1*) de la variable aléatoire réelle* X.

Si a *et* b *sont deux réels,* sup (a, b) *désigne le plus grand des deux et* inf (a, b) *le plus petit des deux.*

Les parties 1 et 2 peuvent être traitées de façon indépendante.

PARTIE 1

1.1. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes; on note respectivement F et G leurs fonctions de répartition. On définit deux autres variables aléatoires S et I en posant :

$$S = \sup(X, Y),\ I = \inf(X, Y)$$

On note Φ et Ψ les fonctions de répartition associées respectivement à S et à I.

x désignant un réel, exprimer $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$ à l'aide de $F(x)$ et $G(x)$.

1.2. On suppose dans cette question (et dans toute la suite du problème) que X est la variable aléatoire réelle (dite uniformément répartie sur [0, 1]) associée à la densité de probabilité f définie par :

$$f(x) = 1 \text{ si } x \in [0, 1]\ ;\quad f(x) = 0 \text{ si } x \notin [0, 1]$$

F étant toujours la fonction de répartition de X, calculer $F(x)$ en distinguant les trois cas $x \leqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $x \geqslant 1$.

1.3. On considère une suite infinie de variables aléatoires réelles $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ deux à deux indépendantes, suivant toutes la même loi que la variable X définie à la question précédente.

On définit par récurrence deux suites infinies $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ et $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, \ldots$ de variables aléatoires réelles par les relations : $Y_1 = Z_1 = X_1$,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ Y_{n+1} = \sup(X_{n+1}, Z_n) \text{ et } Z_{n+1} = \inf(X_{n+1}, Y_n)$$

G_n et H_n sont les fonctions de répartition respectivement associées à Y_n et à Z_n.

a. En faisant intervenir $F(x)$, définie à la question (1.2), exprimer $G_{n+1}(x)$ et $H_{n+1}(x)$ en fonction de $G_n(x)$ et $H_n(x)$.

b. Calculer $G_n(x)$ et $H_n(x)$ lorsque $x \leqslant 0$, puis lorsque $x \geqslant 1$.

c. On suppose, jusqu'à la fin de la partie 1, que $0 \leqslant x \leqslant 1$. On pose

$$\vec{V}_n(x) = \begin{bmatrix} G_n(x) \\ H_n(x) \end{bmatrix}$$

Écrire les relations de récurrence trouvées au (1.3*a*) sous la forme :

$$\vec{V}_{n+1}(x) = A(x) \cdot \vec{V}_n(x) + \vec{U}(x),$$

où $A(x)$ et $\vec{U}(x)$ désignent respectivement une matrice (2×2) et un vecteur que l'on explicitera. Préciser également $\vec{V}_1(x)$.

En déduire l'égalité valable si $n \geqslant 2$, et en convenant que $A^0(x) = I$,

$$\vec{V}_n(x) = A^{n-1}(x) \cdot \vec{V}_1(x) + \left[\sum_{k=0}^{n-2} A^k(x)\right] \cdot \vec{U}(x)$$

1.4. Les notations étant celles de la question précédente, calculer $A^{2p}(x)$ et $A^{2p+1}(x)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.

1.5. Montrer que :

$$1 + A(x) + \ldots + A^{2p-1}(x) = \frac{1 - x^p (1-x)^p}{1 - x + x^2} \cdot (1 + A(x))$$

Calculer $G_{2p+1}(x)$ et $H_{2p+1}(x)$ en fonction de x et de p. Montrer qu'il existe deux fonctions G et H, indépendantes de p, telles que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\quad G_{2p+1}(x) = G(x) + x^{p+1}(1-x)^{p+1} H(1-x),$$
$$H_{2p+1}(x) = H(x) - x^{p+1}(1-x)^{p+1} H(x).$$

Vérifier que $G(x) = \dfrac{x^2}{1 - x + x^2}$ et $H(x) = \dfrac{x}{1 - x + x^2}$.

1.6. Montrer ensuite que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\quad G_{2p}(x) = G(x) - x^p (1-x)^p G(x),$$
$$H_{2p}(x) = H(x) + x^p (1-x)^p G(1-x).$$

1.7. Calculer $\sup_{x \in [0,1]} |x(1-x)|$, puis vérifier que, pour x fixé, élément de $[0,1]$, $\lim_{n \to +\infty} G_n(x) = G(x)$ et $\lim_{n \to +\infty} H_n(x) = H(x)$.

Partie 2

Les notations sont celles de (1.5).

2.1. Calculer $G'(x)$ et $H'(x)$ et étudier les variations de $G(x)$ et $H(x)$ sur $[0,1]$.

Représenter graphiquement ces variations (l'étude de la concavité n'est pas demandée).

On complète la définition de G et H en posant :

$$G(x) = H(x) = 0 \quad \text{si} \quad x < 0\ ; \quad G(x) = H(x) = 1 \quad \text{si} \quad x > 1.$$

Montrer que G et H sont les fonctions de répartition de deux variables aléatoires, qui seront notées respectivement $(Y\infty)$ et $(Z\infty)$.

2.2. Calculer $G(x) + H(1-x)$. Quelle conclusion en tire-t-on pour les graphes respectifs de G et H?

2.3. Calculer $E(Y\infty)$, que l'on exprimera à l'aide de π. On ne demande pas de calcul décimal approché.

2.4. Calculer $E(Z\infty)$. On pourra, au choix, faire le calcul directement ou employer le résultat du (2.2).

2.5. Calculer $E(Y_\infty^2)$ et $E(Z_\infty^2)$.

2.6. Calculer les variances $V(Y\infty)$ et $V(Z\infty)$ des deux variables aléatoires $(Y\infty)$ et $(Z\infty)$. Vérifier qu'elles sont égales. Pouvait-on prévoir aisément le résultat à l'aide de (2.2)?

On n'effectuera nulle part de calcul décimal approché.

Partie 3

Les notations sont celles du (1.3). On pose $u_n = E(Y_n)$, $v_n = E(Z_n)$.

3.1. Montrer que $(u_n + v_n)$ est égal à un réel fixe, que l'on calculera.

3.2. Calculer $\lim_{p \to +\infty} u_{2p}$ et $\lim_{p \to +\infty} u_{2p+1}$. En déduire $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

3.3. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} v_n$.

3.4. On pose $w_n = E(Y_n^2)$, $t_n = E(Z_n^2)$. Étudier la convergence des suites (w_n) et (t_n).